# GONDOLATOK A MEMBRÁNHÉJAKRÓL

Dr. Dulácska Endre

*A vasbeton membránhéjakat általában a statikai egyenletek alapján méretezik, a belső összeférhetőségi feltételek elhanyagolásával. Ez a hosszúkás héjak esetén jelentős hibát okozhat. Bemutatunk egy hosszúkás héjon kialakult repedésképet. Ennek alapján és az elméleti meggondolások szerint a nem centrális elrendezésű héjaknál az összeférhetőségi feltételeket figyelembe kell venni. Végül bemutatjuk a megoldás elvét.*

**Kulcsszavak:** héjszerkezet, kompatibilitás, repedés

## 1. ELŐZMÉNYEK

A vasbeton héjszerkezetek, köznapi néven héjboltozatok az utóbbi száz évben terjedtek el. Az első héjboltozatnak a Zeiss műveknek 1922-ben, Jénában épült, 16,0 méter átmérőjű, 6,0 cm vastag vasbeton félgömbkupoláját tekinthetjük. Ezután rohamosan terjedt a nagyobb terek lefedésére a héjszerkezet. Ha a héj csak a hajlító nyomatékok figyelembevételével tartható egyensúlyban, akkor az ún. hajlításelméletet kell alkalmaznunk. Ez egy nyolcadrendű parciális differenciálegyenletet és annak megoldását jelenti, ami elég nagy matematikai nehézséget jelent, és rendszerint csak a közelítő megoldás lehetséges. E nehézségek elkerülésére a kutatók feltételezik, hogy a vékony héjlemez hajlítási merevsége a normálerők merevségéhez képest elhanyagolható: Ennek megfelelően a hajlítási merevséget zérusnak tekintve, az egyenletekből a hajlítással kapcsolatos tagok kiesnek. Így kialakították a membránelméletet. Ennek egyenletei szerint a felületi normálerők, az ún. membránerők (feltéve hogy a héj külső megtámasztásai képesek az egyensúlyt biztosítani) biztosítják a héjfelület egyensúlyát. A membránelmélet három elsőrendű egyensúlyi differenciálegyenletet tartalmaz. Ezek már lényegesen könnyebben megoldhatóak. Pucher (1934) felfedezte, hogy ha bevezeti az ún. F feszültségfüggvényt, melynek második deriváltjai az $n_x$, $n_{xy}$, $n_y$ membrán metszeterők, (a továbbiakban n erők), akkor a három egyenletből az első kettő azonosan kielégül,a harmadik pedig átmegy a következő másodrendű differenciálegyenletbe.

$$\ddot{z}F'' - 2\dot{z}'\dot{F}' + z''\ddot{F} = p. \qquad (1)$$

A fenti egyenletben z a felületfüggvény, F a feszültségfüggvény, p a függőleges teher függvénye, és a *pont* az y szerinti, a *vessző* pedig az x szerinti deriválás jele. Az $n_x$ és $n_y$ metszeterők az F függvény x és y irányú második deriváltjai. Így csak egy egyenletet kell megoldani, igaz, hogy az másodrendű. Előnye a feszültségfüggvény alkalmazásának, hogy az oldalnyomás-mentesség peremfeltételét az F függvény perem menti zérus értékével lehet leírni Az F függvényt grafikusan egy felülettel lehet jellemezni.

*Szmodits (1966) szerint*: *„A membránelmélet közelítése tehát abban áll, hogy elhanyagolja az alakváltozási kerületi és összeférhetőségi feltételeket. Ha a membránmegoldás teljesíti az egyensúlyi és alakváltozási kerületi feltételeket, és csupán az összeférhetőségi feltételeket hanyagolja el, egzakt membránmegoldásról beszélünk. Ha a megtámasztás statikai kerületi feltételeivel a membránegyenletek a metszeti erőkre egyértelműen megoldhatók, a héjat „külsőleg statikailag határozott héjnak mondjuk. A héjak a kompatibilitási (összeférhetőségi) feltételek miatt minden esetben belsőleg statikailag határozatlanok.*

*Ha a megtámasztás statikai és alakváltozási feltételeket is tartalmaz, a vizsgálatot a hajlítási egyenletek figyelembevételével az alakváltozási egyenletek megoldásával kell elvégezni. Ha a megoldás egyértelmű, a héjat „külsőleg statikailag határozatlan" héjnak mondjuk. Ha a felsorolt két esetben az adott kerületi feltételekkel a feladat egyértelműen nem oldható meg, a membránelmélet nem alkalmazható."*

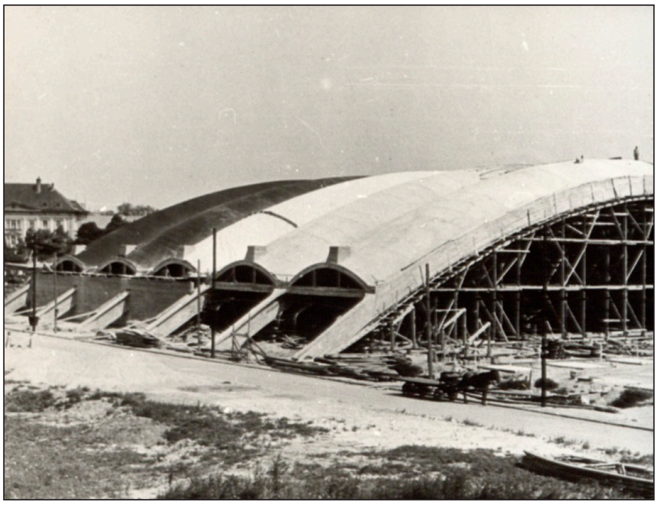
A szakirodalom, pl. Menyhárd (1942), Bölcskei (1952), Flügge (1957), Szmodits (1966), Menyhárd (1966) Csonka (1981), Kollár-Dulácska (1994), és a gyakorlat, pl. Harasta, (1960), Reisch (1965) általában az „egzakt" megoldást alkalmazza, a kompatibilitási feltételt elhanyagolva. A fenti Szmodits-féle megfogalmazásból hiányzik az a *teljes* membránelméletnek nevezhető eset, amikor az egzakt membránelméletet kiegészítjük az összeférhetőségi egyenletekkel. Az összeférhetőségi egyenletek elhanyagolása a közel centrális esetekben valóban elhanyagolható kis hibát eredményez, de hosszúkás elrendezésű hájaknál számottevő hibát okozhat az egzakt membránelmélethez képest.

A következőkben egy ilyen esetet szándékozunk bemutatni.

## 2. A BUDAPEST, HAMZSABÉGI ÚTI AUTÓBUSZGARÁZS HÉJSZERKEZETE

A Hamzsabégi autóbuszgarázs építész tervezője Padányi Gulyás Jenő volt. Az épületet meghatározó vasbetonszerkezete, és benne a héjszerkezet is a tervezés idején 34 éves Menyhárd (1942) műve.

A Hamzsabégi útiautóbuszgarázs építész tervezője Padányi Gulyás Jenő volt. Az épületet meghatározó vasbetonszerkezet, és benne a héjszerkezet is a tervezés idején 34 éves Menyhárd (1942) műve. Az épület 1938-1941-ben épült, monolit vasbeton



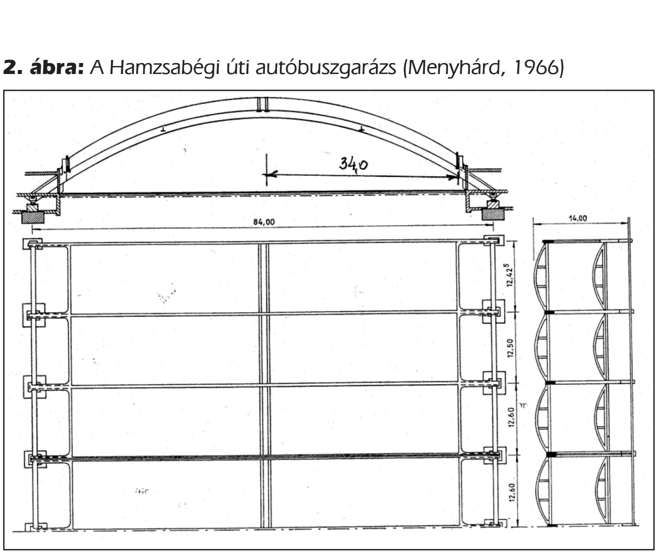
**1. ábra:** A garázs héjszerkezete építési állapotban (Foto: Menyhárd, 1942)

építési technológiával. A 84,0 méter támaszközű, 12,5 méter kiosztású, 50/150 cm keresztmetszetű háromcsuklósnak épített, majd a középső csuklók bebetonozásával kétcsuklóssá alakított vasbetoníveket a Siemens által gyártott, 130 mm átmérőjű, darabokból készült, és csavarhüvelyekkel kapcsolt acél vonórudak kötik össze. A vonórudak lehorgonyzása acél bakokkal történt, melyeken a vonórudat átvezették, és nagyméretű csavaranyával lehorgonyozták. A vasbetonívek közét 6,0 cm vastag elliptikus paraboloid héj hidalja át. A hagyományos aláállványozott módon való építést az *1. ábra* mutatja.

Az épület vázlatos ismertetése a *2. ábrán* látható. A héj két darab 34,0 méteres elliptikus paraboloidból áll, 2,4 m nyílmagassággal, mindkét irányban. A vonórúd a padló alatti padlócsatornában fut végig. A csarnok ma már műemléki védelem alatt áll. (A tervezési díj Menyhárd szerint 4000 pengő volt.)

A kiállványozáskor történt egy kis hiba. Az állvány leeresztésekor hirtelen nagy ropogást-recsegést hallottak. Menyhárd kiparancsolt mindenkit az épületből, és fölment a héj tetejére, megnézni, hogy mi történt. Azt látta, hogy az egyik ívnél elfelejtették kibetonozni a tetőponton lévő csuklót, a vasak kihajlottak, és a két félív egymás mellé csúszott. Az építkezést leállították, és Csonka professzort kérték fel véleményezésre. Csonka azt javasolta, hogy az elcsúszott íveket jobbra-balra vasbeton kereszttartókkal támasszák ki. Így is történt, és az építkezést befejezték. A héj a maga idejében a világ legnagyobb ilyen héjszerkezete volt.

**2. ábra:** A Hamzsabégi úti autóbuszgarázs (Menyhárd, 1966)




A háborút befejező budapesti ostrom idején a gépi szellőztető berendezés tönkrement, és a csarnokot annak felújítása nélkül üzemeltették tovább. Közben bejött a kéntartalmú szovjet gázolaj, és a kipufogó gázokból az ívekre és a héjfelületre kicsapódó kénessav tartalmú páralecsapódás azokat súlyos mértékben korrodálta. Az 1970-es években több szakvélemény a csarnok lebontását javasolta, mert a szükséges állékonysági biztonság nem volt kimutatható.

Végül is a Buvátiban egy közbenső vonórudas megerősítést terveztünk, melyet ferde rudazattal kötöttünk fel az ívekhez, és ezzel egy rácsostartószerű erőjátékot hoztunk létre. Így a héjszerkezet térbeli merevítő hatását is a figyelembe véve, a statikai modellt úgy sikerült módosítanunk, hogy a merevebbé váló szerkezet a csökkent keresztmetszeti teherbírással kombinálódva a szerkezetet megfelelő állapotba tudta visszahozni. A belső felület homokfúvásos letisztítás után vízzáró, de páraáteresztő műanyag védőréteget kapott, és a szellőző berendezést természetesen rendbe kellett hozni. A helyreállítás során észleltük, hogy a héjakon 2-3 méterenként a héj teljes keresztmetszetén áthaladó keresztirányú repedések vannak (3. ábra).

## 3. A HÉJSZERKEZET VIZSGÁLATA

A héjat Menyhárd az általa kidolgozott módszer szerint, a feszültségfüggvény sarokugrására épített elmélet alapján számította. Számítása szerint a héjban az x keresztirányban kisebb értékű, az y hosszirányban pedig jelentős értékű nyomó membránerő ébred.

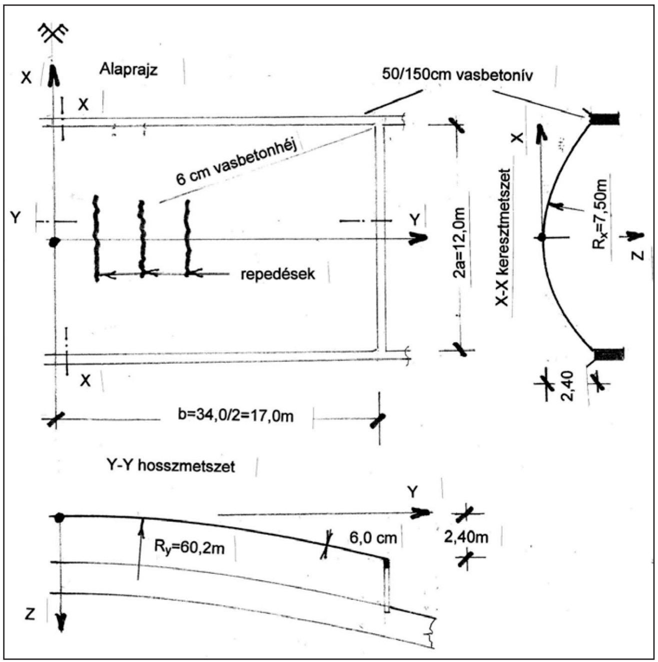
Ha a szokásos membránelmélet szerint számítunk egy négyzetalaprajzú héjat, akkor azt kapjuk, hogy a teher fele az egyik, a másik fele a másik irányba boltozódik át. Ha megnyújtjuk a héjat a tényleges hosszirányban, a Csonka (1981) által ismertetett Dischinger-féle affin héj alkalmazásával a hosszirányú membránerő a hosszított, és az eredeti hossz hányadosa négyzetének megfelelő értékben megnövekszik. Ez az érték megegyezik a Menyhárd által számított értékkel.

Felmerül a kérdés, hogy ha a hosszirányban van a nagy nyomóerő, hogyan keletkeztek a héjon a keresztirányú repedések. Meggondolva a dolgot, kiderül, hogy a melegebb belső tér és a külső (téli) hidegebb légtér a hőszigeteletlen héjon hosszirányban húzást okozhat. Ez a húzás a számítás szerint azonban mindenképp kisebb, mint a hosszirányú nyomás, és keresztirányú repedés csak akkor keletkezhet, ha a hosszirányú nyomás a középvonalban jóval kisebb, mint az egyszerű (egzakt) membránelmélet szerint számított. Valóban, ha a kompatibilitási feltételből a héj középpontjára felírjuk az erőket, kiderül, hogy a héj középvonalában a hosszirányú membránerő jelentősen lecsökken, a keresztirányú viszont megnövekedik, az összeférhetőségi feltétel teljesítése miatt. Így már lehetséges a keresztirányban futó repedések létrejötte. Ez egyben azt is jelenti, hogy a héj a fél tehernél nagyobb részt ad le keresztirányban, a hosszirányú peremívekre.

### Statikai vizsgálat

A szemléltető, egyszerűsített számítást a vízszintesre vetített héjmodellen mutatjuk be. (Menyhárd is így számította.) Ennek csak a felét láthatjuk a 3. ábrán, melyen az alkalmazott jelöléseket is feltüntettük. A hosszanti vasbeton peremívek jobboldalt kifutnak a támaszokat képező alapokig.

Az egyszerűsített számítást 2,50 kN/m$^2$ felületi teherre mutatjuk be, Menyhárd (1942) is erre a teherre tervezte a szerkezetet.




**3. ábra:** *A héj vízszintesre vetítve*

A vizsgálat során az X-X keresztmetszetben ébredő $n_y$ metszeti membránerőt határozzuk meg, először a szokásos, (egzakt) membránelmélet szerint. Ezután számításba véve az elhanyagolt kompatibilitási egyenletet, meghatározzuk az $n_y$ metszeterőt a kompatibilitást is figyelembe véve (teljes membránelmélet), és összehasonlítjuk a kétféle számítás eredményét.

**Számítás a szokásos (egzakt) membránelmélettel**

y=0, x=a helyen: $n_y=p\cdot R_y=2{,}5\cdot 60{,}2=150{,}5$ kN/m,
y=0, x=0 helyen: $n_y=0{,}5\cdot p\cdot R_y=0{,}5\cdot 2{,}5\cdot 60{,}2=75{,}25$ kN/m,
y=b, x=0 helyen: $n_x=p\cdot R_x=2{,}5\cdot 7{,}5=18{,}75$ kN/m.
y=0, x=0 helyen: $n_x=0{,}5\cdot p\cdot Rx=0{,}5\cdot 2{,}5\cdot 7{,}5=9{,}38$ kN/m.

A teher egyik fele az x, másik fele az y irányban boltozódik át. Tehát így számítva a héj igénybevétele az y irányban lényegesen (nyolcszor) nagyobb, mint az x irányban. Az ívekre az $n_{xy}$ nyírás közvetíti az $n_x$ és $n_y$ membrán metszeterőket. Az egy ívre átadódó eltoló T erő (az n erők összege):

$T_y= 6{,}0(150{,}5-0{,}67\cdot 75{,}2)=602$ kN, és $T_x=17(18{,}75-0{,}67\cdot 9{,}38)=212$ kN.

**Számítás a kompatibilis (teljes) membránelmélettel**

Szmodits (1966) szerint a csak függőleges p teherrel terhelt membránhéj kompatibilitási (összeférhetőségi) egyenletei a következők:

$$D(u''-w'/R_x)+0{,}5\cdot D(u^{\cdot\cdot}+v'^{\cdot})=0,\quad D(v^{\cdot\cdot}-w^{\cdot}/R_y)+0{,}5\cdot D(u'^{\cdot}+v'')=0, \qquad (2)\ (3)$$

$$(D/R_x)\,(u'-w/R_x)+ (D/R_y)\,(v^{\cdot}-w/R_y)=p. \qquad (4/a)$$

Itt u ill.v az x, ill. az y irányú felületsíkú eltolódás, w a felületre merőleges elmozdulás, $R_x$ a (w,z) síkú, $R_y$ pedig az (y,z) síkú felületi görbületi sugár, és D a nyúlási merevség.

A továbbiakban csak az x=0, y=0 héjközéppontot vizsgáljuk, és feltesszük, hogy a héj mindkét irányban szimmetrikus kialakítású.
Ekkor $w=w_0$, jó közelítéssel konstansnak tekinthető, és így

$w'=w^{\cdot}=0$, u=v=0,

valamint

$u''=v^{\cdot\cdot}=u'^{\cdot}= v'^{\cdot} =0$.

Így a (2) és a (3) egyenlet azonosan kielégül, és a (4) egyenlet a következő lesz:

$$D\cdot w/R_x^{\,2}+D\cdot w/R_y^{\,2}=p. \qquad (4/b)$$

Az x és y irányokat szétválasztva: $p=p_x+p_y$, és $w_x=p_x\cdot R_x^{\,2}/D$, és $w_y=p_y\cdot R_y^{\,2}/D$. Miután $w_x$ és $w_y$ ugyanarra a pontra vonatkoznak, így $w_x=w_y=w_0$. Egyenlővé téve a két egyenletet, és figyelembe véve, hogy:

$p=p_x+p_y$

és hogy D és w kiesik, az egyenlet:

$(p-p_y)=p_y(R_y/R_x)^2$.
Innen
$p=p_y(1+R_x^{\,2}/R_y^{\,2})$, és ebből

$p_y=p/[1+( R_y^{\,2}/ R_x^{\,2})]$ és

$$p_x=p/[1+(R_x^{\,2}/R_y^{\,2})]. \qquad (5/a,\ 5/b)$$

A teljes(kompatibilis) membránszámítással :

$n_y=p_y\cdot R_y$ E, és $n_x= p_x\cdot R_x$.

Ezek után a héj metszeterői a az (5) egyenletek figyelembevételével a héj középpontjában:

y=0, x=a helyen: $n_y=p\cdot R_y=2{,}5\cdot 60{,}2=150{,}5$ kN/m,
y=0, x=0 helyen: $n_y= p\cdot R_y/[1+( R_y^{\,2}/ R_x^{\,2})]=2{,}5\cdot 60{,}2/[1+(60{,}2^2/ 7{,}5^2)]=2{,}30$ kN/m,
y=b, x=0 helyen: $n_x=p\cdot R_x=2{,}5\cdot 7{,}5=18{,}75$ kN/m.
y=0, x=0 helyen: $n_x= p\cdot R_x/[1+( R_x^{\,2}/ R_y^{\,2})]=2{,}5\cdot 7{,}5/[1+(7{,}5^2/60{,}2^2)]=18{,}46$ kN/m.

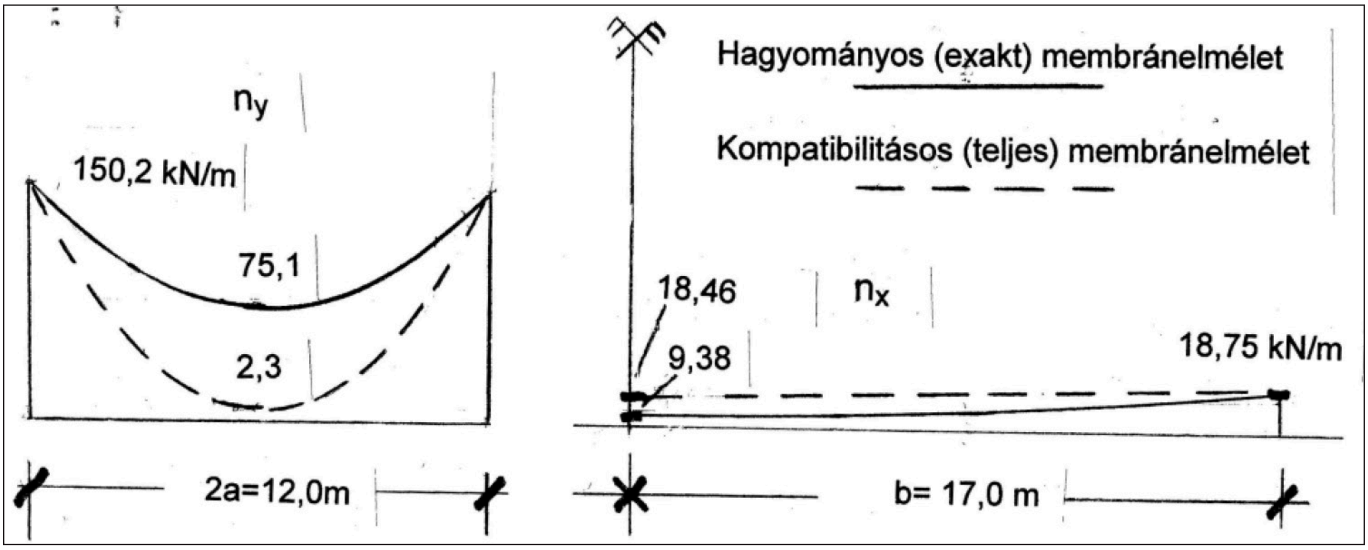
A teher nagyobb része az x, a kisebb része az y irányban boltozódik át. Tehát így számítva a héj igénybevétele az x irányban lényegesen (nyolcszor) nagyobb, mint az y irányban. Az ívekre az $n_{xy}$ nyírás közvetíti az n erőket. Az egy ívre átadódó eltoló erő (az n erők összege):

$T_y=6{,}0(150{,}5-0{,}67\cdot 148{,}2)=307{,}2$kN, és $T_x=17(18{,}75-0{,}67(18{,}75-18{,}46))= 316{,}5$kN.

## 4. ÉRTÉKELÉS

A két eredmény között elég jelentős az eltérés, ami különösen gondolatébresztő a héjat megtámasztó peremívek tekintetében. Az y irányú peremívekre ugyan csak fele akkora eltoló erő jut, de ugyanakkor kétszeres függőleges teher terheli.

Az eredmény megmagyarázza, hogy hogyan tudott kialakulni a héjon a keresztirányú repedésrendszer. A fűtetlen csarnok belső hőmérséklete +5~10 $^0$C-ra tehető, ugyanis az autóbuszok motorjának melege temperálja a belső teret. Ugyanez lehet a hőmérséklete a lefelé álló peremíveknek is. A hőszigeteletlen héjlemez hőmérséklete pedig téli viszonyok között mínusz 10~15 $^0$C fokra becsülhető. Ez a hőmérséklet-




**4. ábra:** *A metszeterők az x-x és az y-y tengelyekben*

különbség felül, a héjlemez közepén húzást okoz. Ha az y irányban a szokásos membránszámítás szerinti nagy nyomás alakult volna ki, a repedések nem jöhettek volna létre, mert a húzás nem repeszthette volna meg a héjat. Ha viszont a kompatibilitásos számítást nézzük, a teherből alig van nyomás y irányban a héj tengelyében, így a hőmérsékleti húzás megrepesztheti a héjat, mint ahogy az be is következett.

Meg kell jegyezni, hogy a tárgyalt anomália a centrális kupolahéjaknál nem, vagy kevéssé fordul elő, mert ez elsősorban a nyújtott elrendezésű kupolahéjak sajátja. De előfordulhat a centrális elrendezésű hiperbolikus héjaknál is.

# 5. A KOMPATIBILIS (TELJES) MEMBRÁNELMÉLET GONDOLATI BEMUTATÁSA

Ha nem elégszünk meg a metszeterőknek a jellegzetes pontokon való meghatározásával, akkor meg kell keresni a feladatnak megfelelő F feszültségfüggvényt. Ennek szemléltetésére válasszunk egy függőleges p terhű, ellipszis alaprajzú héjkupolát, melynek x irányú féltengely hossza a, az y irányúé pedig b. A tetőpont nyílmagassága legyen f. Az oldalnyomás mentességét egy húzott peremgyűrűvel lehet biztosítani, ha az F feszültségfüggvény a peremen zérus. A számítást Csonka (1981) szerint szemléltetjük.

Az F feszültségfüggvénynek a következőnek kell lennie: $F=A(x^2/a^2+y^2/b^2-1)\cdot=A\cdot F_0\ Ø(x,y)$. Az A együttható: $A=a^2\ b^2\ p/f$. A zárójelen belüli tag az ellipszis pereme mentén zérus, és ezzel biztosítja az oldalnyomás-mentességet, a Ø(x,y) függvényt pedig a tehernek megfelelően kell megválasztani. Csonka számos teherre megadta a Ø(x,y) függvény értékét. Így pl. egyenletes teherre 0,25. Más terhekre különböző függvények, ill. függvénysorok írják le. Sajnos, nem írta fel a kompatibilitási feltételnek megfelelő Ø(x,y) függvényt. Ezt még ezután kell meghatározni, nemcsak az ellipszis alaprajzú, hanem a téglalap alaprajzú héjak esetére is. Tájékoztatásul szolgálhat ehhez, hogy ennek a függvénynek hiperbolikusnak kell lennie, mert az egyik irányban csökkenteni, a másik irányban pedig növelni kell a teherhordást. Függvénysor esetén a sor együtthatóit kollokációs módszerrel lehet meghatározni, annak figyelembevételével, hogy az egyensúlyozott teher a tényleges teherrel egyezzen meg az adott pontokban.

Téglalap alaprajz esetén az eljárás hasonló, de $F_0=(1-x^2/a^2)(1-y^2/b^2)$, és az A együttható helyett egy, a peremívek esetleges különböző értékét figyelembevevő B együttható lesz érvényes.

# 6. HIVATKOZÁSOK


Pucher, A. (1934), „Über den Spannungzustand in gekrümmte Flächen", *Beton und Eisen*, 33/1934, 298 p.

Menyhárd, I. (1942), „A B.Sz.K.R.T. kelenföldi autóbusz kocsiszínjének héjszerkezetei", *Doktori értekezés*, Budapest

Bölcskei, E. (1952), „Deformation des voiles minces", *Acta Technica Acad. Sci. Hung*. V/4. 489 p.

Flügge, W. (1957), „Statik und Dynamik der Schalen", *Springer Verlag*, Berlin

Harasta, M. (1960), „Héjszerkezetű térlefedések", ÉKME Tudományos Közlemények, VI. k. 1-2.

Reisch R. (1965), „Magasépítési héjszerkezetek 40 éve", *Magyar Építőipar*, 722 p.

Szmodits K. (1966), „Statik der modernen Schalenkonstruktionen", Werner Verlag. Düsseldorf

Menyhárd, I.: Héjszerkezetek. Műszaki Kiadó, Budapest, 1966.,

Csonka P. (1981), „Héjszerkezetek", *Akadémiai Kiadó*, Budapest

Kollár L., Dulácska E. (1994), „Héjszerkezetek", BME Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék



**Dr. Dulácska Endre** okl. építészmérnök, 1930-ban született. 1950-82 között a BUVÁTI, 1982-1992 között a Tervezésfejlesztési Intézet statikus mérnöke, szakági főmérnök. 1991-től egyetemi tanár a BME Építészmérnöki Kar Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszékén, jelenleg Prof.Emeritus. A SÁMSON Építés-Statikai Kft. ügyv. igazgatója. A Műszaki Tudomány Doktora (1983), az MTA Földrengésmérnöki Nemzeti Bizottságának elnöke, és az Akusztikai Bizottság tagja. Számos korábbi szabvány kidolgozásában volt jelentős része. Szakmai munkásságát nyolc könyve, több mint 200 publikációja, és mintegy 200 épülete fémjelzi. Hivatkozottsága is 200 feletti. A Magyar Mérnöki Kamara választmányi tagja, a budapesti Mérnöki Kamara etikai és fegyelmi bizottság tagja, a Tartószerkezeti Tagozat elnökségi tagja. Munkássága elismeréseként Eötvös Díjat, Csonka emlékérmet, Akadémiai Díjat, Széchenyi Díjat, MTA Ötvös Koszorút, Palotás László Díjat, Köztársasági Érdemrendet, és az MMK-tól Zielinszky díjat, Kardos Andor díjat, és Aranygyűrű díjat kapott, .



**SOME REFLECTIONS ABOUT MEMBRANE SHELLS THEORY**
**Endre Dulácska**
Reinforced concrete membrane shells are usually designed based only on the statical equations, neglecting the internal compatibility criteria. This can cause significant errors in the longitudinal shells. The presented example illustrates the cracking pattern of a longitudinal shell. According to this, and based on theoritical considerations, in case of non-centralized shells the compatibility criteria has to be taken into account. Finally, we present the principle of the solution.